MPSI

DM de mathématiques n°4

09/11/2026

À rendre pour le lundi 16 novembre.

Exercice 1 — Une paramétrisation du cercle unité de $\mathbb{R}^2$

On note $\mathcal{C}$ les points de $\mathbb{R}^2$ qui sont sur le cercle unité (cercle de centre l'origine et de rayon 1), c'est-à-dire :

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = 1\right\}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

On pose enfin

$$\Gamma = \left\{\varphi(t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$$

Dans un premier temps, l'objectif est de comparer les ensembles Γ et $\mathcal{C}$.

1) Montrer que $\Gamma \subset \mathcal{C}$, puis que $(-1,0) \notin \Gamma$.

2) Soit $(x,y) \in \mathcal{C}$ tel que $(x,y) \neq (-1,0)$. Les deux sous-questions qui suivent montrent le même résultat par deux approches différentes :

a) On pose $t = \dfrac{y}{1+x}$. Montrer que $1+t^2 = \dfrac{2}{1+x}$, puis que $\varphi(t) = (x,y)$.

b) Justifier qu'il existe $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$ tel que $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. En déduire avec des formules trigonométriques qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = (x,y)$.

3) Déduire des questions précédentes que $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{(-1,0)\}$.

4) À l'aide de la question 3, montrer que

$$\left\{\frac{2t}{1+t^2} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} = \left[-1,1\right]$$

5) Retrouver ce résultat en étudiant les variations de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$.